$4^{\text{éme}}$ Sc-Exp

Série N°:1

(Nombres Complexes)

EXERCICE N°1 :

I/ Résoudre dans C l'équation suivante : $(1 - i)z + (2i - 1)\bar{z} = 3 - 4i$

II/ Déterminer les valeurs du réel $\theta \in]0,2\pi[$, tel que : $|\cos\theta + 1 + i\sin\theta| = \sqrt{3}$

III/ Soit z un nombre complexe dont $Ré(z) = 1$ et $Arg(z) = \pi/3 + 2k\pi$.
Déterminer le module et la forme algébrique de z.

IV/ Montrer que pour tout z et $z' \in \mathbb{C}$, on a : $|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2$

V/ Montrer que si $|z| = 1$ et $z \neq -1$, alors $\dfrac{i - iz}{1+z}$ est réel.

EXERCICE N°2 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A(2) , B(1) et C(-4).

Soit $f : P \setminus \{A\} \to P$

$$M(z) \mapsto M'(z') \quad \text{tel que } z' = \frac{\bar{z}+4}{\bar{z}-2}$$

1/ Déterminer l'ensemble E des points M(z) tel que $|z'| = 1$.

2/ Déterminer l'ensemble des points M(z) pour lesquels z' soit imaginaire pur.

3/ Soit le point $D(1+i\sqrt{3})$. Déterminer l'affixe du point D' tel que f(D) = D'.
En déduire que D' est le milieu du segment [OD].

4/ a- Montrer que pour tout $z \neq 2$ on a : $(\bar{z}-2)(z'-1) = 6$

b- En déduire que : pour $M \neq A$, on a : $AM.BM' = 6$ et $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{BM'}}) \equiv (\widehat{\vec{u},\overrightarrow{AM}})[2\pi]$.

c- Montrer que si $M \in \zeta(A,3)$, alors M' appartient au cercle ζ' que l'on déterminera.

d- Montrer que si M appartient à l'axe des abscisses alors, A, B, M et M' sont alignés.

EXERCICE N°3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A et B d'affixe respectives : $5 - i\sqrt{3}$ et $4 + 2i\sqrt{3}$. On note $Q = O * B$.

1/ Déterminer z_Q et z_K tel que ABQK soit un parallélogramme.

2/ a- Montrer que $\dfrac{z_K - z_A}{z_K}$ est imaginaire pur.

b- Que peut-on déduire pour le triangle OKA?

c- Préciser la nature du quadrilatère AQOK.

3/ Soit C le point d'affixe $z_C = \frac{2}{3} z_A$

Calculer $\dfrac{z_K - z_B}{z_K - z_C}$. Que peut-on déduire pour les points K, B et C?

EXERCICE N°4 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A,B,C et D d'affixes respectives : $1+i$, $\sqrt{3}-i$, $(1+\sqrt{3}) + i(\sqrt{3}-1)$ et $1+i\sqrt{3}$.

1/ Ecrire z_A , z_B et z_D sous forme exponentielle.

2/ a- Vérifier que $z_A \times z_C = 2z_D$, déduire la forme exponentielle de z_C .

b- Déterminer alors les valeurs exacte de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

3/ a- Montrer que le triangle OBD est rectangle isocèle en O.

b- Montrer que le quadrilatère OBCD est un carré.